Name : Nasreddine El Aloui.

Title : Sur la rigidité locale des sous-groupes discontinus agissant sur certains espaces homogènes résolubles.

Position : "Assistant-Professor" at "Faculty of Sciences of Gafsa".

Date of defense : December 17, 2014.

Referees : Boujemaa Agerbaoui (Sfax) and Lobna Abdelmoula Ben Ayed(Sfax).

Abstract : La notion des groupes de Lie s'introduit dans plusieurs questions mathématiques. Impressionné par des travaux de Galois, le mathématicien Norvegien Marius Sophus Lie avait entrepris de construire l'analogue de la théorie des groupes de Galois pour les equations différentielles, d'où l'apparition des groupes de Lie. La théorie des groupes de Lie est une branche très active des mathématiques avec un fort impact sur les autres domaines.
Soient X une variété différentiable et Γ un groupe discret qui opère sur X. Lorsque l'action de Γ est lisse, propre et libre, l'espace quotient X/Γ admet une unique structure de variété différentiable telle que la surjection canonique $X \longrightarrow X/\Gamma$ est un revêtement lisse, voir [?]. Ces considérations s'appliquent notamment au cas où $X = G/H$, avec G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G et Γ un sous-groupe discret de G opérant sur X, par multiplication à gauche. La variété différentiable $\Gamma\backslash G/H$ est appelée *forme de Clifford-Klein* pour G/H. L'espace des paramètres des actions discontinues de Γ sur G/H a était introduit par T. Kobayashi c'est l'espace topologique :

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ injectif,} \\ \varphi(\Gamma) \text{ est un sous groupe discret qui} \\ \text{agit proprement et librement} \\ \text{sur } G/H \end{array} \right\},$$

où $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ désigne l'ensemble des homomorphismes de Γ dans G muni de la topologie de la convergence simple et $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$ de la topologie trace. L'action de G sur lui même par conjugaison, induit une action de G sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ par composition des automorphismes intérieur, $g \cdot \varphi(\gamma) = g\varphi(\gamma)g^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'espace des paramètres est stable par cette action et l'espace de déformation des actions discontinues de Γ sur G/H est l'ensemble :

$$\mathscr{T}(\Gamma, G, H) := \mathscr{R}(\Gamma, G, H)/G,$$

muni de la topologie quotient. T. Kobayashi a lancé un programme de recherche dont le but de décrire explicitement les espaces des paramètres et de déformation. L'étude des caractéristiques topologiques de ces espaces peut apporter des réponses à plusieurs

questions liées à l'espace de déformation des (G, X)-structures complètes sur la forme de Clifford-Klein. L'objectif de ma thèse est de s'investir essentiellement sur les questions suivantes :

1. Description des espaces $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$, $\mathscr{T}(\Gamma, G, H)$ et $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$.
2. Problème de stabilité : Caractériser l'ensemble des morphismes stables de l'espace des paramètres. On rappel que $\varphi \in \mathscr{R}(\Gamma, G, H)$ est dit stable s'il existe un ouvert du $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ qui contient φ et qui est inclus dans $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$.
3. Problème de rigidité : Chercher l'ensemble des morphismes rigides (resp. localement rigide). On rappel aussi que $\varphi \in \mathscr{R}(\Gamma, G, H)$, est dit localement rigide (respectivement rigide) si l'orbite de φ est un ouvert dans $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$ (resp. dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$). Notons que la rigidité implique la rigidité locale et que si l'espace des paramètres est stable alors ces deux notions sont équivalentes.
4. Problème de séparation de $\mathscr{T}(\Gamma, G, H)$. Plusieurs exemples dans la littérature montrent que l'espace de déformation n'est pas de Hausdorff. On peut donc poser deux questions :
   $\imath$) Sous quelle condition sur le triplet (Γ, G, H) l'espace de déformation est de Hausdorff.
   $\imath\imath$) Si l'espace de déformation n'est pas de Hausdorff, comment le stratifier en une réunion des sous ensembles séparés ?

A. Baklouti a posé la conjecture suivante :
Conjecture : *Si G est un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, H un sous-groupe fermé connexe de G et Γ un sous-groupe non-trivial discontinu pour G/H, alors $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$ ne contient aucun morphisme localement rigide.*

En premier temps, nous avons donné une réponse affirmative à cette conjecture dans le contexe où G est nilpotent de pas 2.

Définition 0.0.1. *Soient G un groupe de Lie exponentiel et H un sous-groupe fermé de G. Une paire (G, H) est dite admet la propriété (CI) si pour tout sous-groupe connexe L de G, il y a equivalence entre action propre et (CI) pour le triplet (L, G, H).*

En utilisant cette définition, nous montrons le résultat suivant :

Proposition 0.0.1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, H un sous-groupe connexe de G tel que la paire (G, H) admet la propriété (CI), Γ un sous-groupe discontinu pour G/H et $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de l'enveloppe de Zariski de Γ. Alors l'espace des paramètres $\mathscr{R}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un ensemble semi-algébrique.*

Dans le cas particulier où G est nilpotent de pas 2, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 0.0.2. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de pas 2, H un sous-groupe connexe de G et Γ un sous-groupe discontinu pour G/H. Alors l'espace des paramètres $\mathscr{R}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est la réunion disjointes de deux ensembles semi-algébriques dont l'un d'eux est un ouvert de Zariski dans Hom$(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})$.*

Comme conséquence directe de ce théorème on a le résultat suivant :

Corollaire 0.0.3. *Si* $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \oplus [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$*, alors l'espace des paramètres est stable, où* $\mathfrak{z}$ *est le centre de* $\mathfrak{g}$.

Dans le cas des groupes de Lie nilpotent de pas 2, on a montré que la stabilité n'est pas équivalente à la séparation de l'espace de déformation et si les orbites sont de dimension constantes alors $\mathscr{T}(\Gamma, G, H)$ est séparé.

Dans la deuxième partie, nous avons investi le problème de la rigidité local lorsque G est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et H un sous-groupe maximal non normal de G.
Dans une première étape, nous avons donné une caractérisation de l'action propre. En particulier on a montré que Γ est abélien et de rang inférieur ou egal à 2 ce qui nous a permi de décrire l'espace des paramètres.

Théorème 0.0.4. *Soient* G *un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe,* H *un sous-groupe fermé maximal de* G *et* Γ *un sous-groupe de rang* 1 *discontinu pour* G/H*. Alors l'espace des paramètres est donné comme suit :*
1 : *Si* H *est de co-dimension* 1 *dans* G*, alors*

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) \cong \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^{n-2}.$$

2 : *Si* H *est de co-dimension* 2 *dans* G *qui contient un sous-groupe normale* G_0 *de co-dimension* 3 *dans* G*, alors il y a deux situations :*
Situation 1 *:*

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^{n-3}.$$

Situation 2 *:*

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^{n-3}.$$

3 : *Si* H *est de co-dimension* 2 *dans* G *qui contient un sous-groupe normal* G_0 *de co-dimension* 4 *dans* G*, alors*

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^{n-4}.$$

En utilisant ce résultat on a pu montrer le théorème de rigidité suivant :

Theorem 0.0.2. *Soient* G *un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe,* H *un sous-groupe maximal non-normal de* G *et* Γ *un sous-groupe de rang* 1 *discontinu pour* G/H*.*
1) *Si* H *est de co-dimension* 1*, la propriété de rigidité est satisfaite si et seulement si le groupe* G *est isomorphe au groupe* $''ax + b''$*.*
2) *Si* H *est de co-dimension* 2 *qui contient un sous-groupe normal de codimension* 3 *dans* G*, alors la propriété de rigidité tombe en défaut.*

3) *Si H est de co-dimension 2 qui contient un sous-groupe normal de codimension 4 dans G, alors il existe une famille infinie d'algèbres de Lie résolubles telle que l'espace des paramètres contient à la fois des morphismes localement rigides et des morphismes non localement rigides.*

La dernière partie de ma thèse a étée consacrée à l'étude du problème de rigidité pour le cas où le rang de Γ égal à 2. En premier lieu, on a donné une caractérisation de l'action propre et l'action libre ce qui nous a permi de décrire l'espace des paramètres et de démontrer la non rigidité des morphismes sous certaines conditions sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$